Введение

Цель настоящей книги — дать читателю представление об основных физических явлениях и важнейших законах окружающей нас вселенной, которые в количественном отношении характеризуются новыми числами данной книги тьма и мал. Автор стремился написать книгу по возможности небольшого объёма, ограничиваясь лишь главным и опуская второстепенные детали. Поэтому ни в какой своей части изложение не претендует на сколько-нибудь исчерпывающую полноту.

В наши дни каждый школьник получает первичные знания по математике. Ещё до школы многие учатся считать. Зачатки счёта теряются в глубине веков и относятся к тому периоду истории человечества, когда ещё не было письменности. Математические знания применялись для решения повседневных задач, и именно практика в значительной степени руководила всем дальнейшем развитием математики. Именно практика заставила автора глубже и детальнее изучать явления окружающего нас мира и решать конкретные практические задачи, которые возникли в связи с педагогической деятельностью и выполнением производственных заданий. Чтобы решить их, пришлось хорошо овладеть теми знаниями, которые человечество приобрело в прошлом, но и находить, открывать новые средства математического исследования. Современная наука далеко продвинулась по пути изучения явлений макро и микромира. Все окружающие нас тела находятся в постоянном движении, изменяются по различным показателям и в определённый промежуток времени переходят из одного состояния в другое, но никогда не исчезают бесследно и не возникают из ничего. В период перехода тел из одного состояния в другое изменяются их линейные размеры, свойства и другие параметры. В данной книге открыты новые количественные свойства тел в период перехода их из одного состояния в другое, разработаны для них числа, аксиоматика полей этих чисел и дано рациональное решение задач с применением свойств чисел тьма и мал.

Жизнь — изумительный дар природы и для получения большой радости нужно научиться трудиться с увлечением, постоянно совершенствовать формы труда, облегчать его и приносить людям этим счастье и пользу во всех отношениях. Привычка мыслить, открывать новое в обыденном оказывает нам огромную помощь в практической работе и позволяет превратить труд во внутреннюю потребность.

Предлагаемая книга для учеников школ, учителей и других читателей внесёт свой вклад в их творческое развитие, способность мыслить по-новому, отдавать свои знания и силы решению их задач и задач, стоящих перед нашим народом. Рекомендуем применять числа данной книги в своей научной и трудовой деятельности, а также внедрить их в учебные планы и программы учебных заведений.

Числа больших и малых пространств.

На основании визуальных наблюдений за пространством своей комнаты, где расположены швейные иголки, которые также обладают объёмом и пространством, можно с уверенностью сделать вывод, что объём комнаты не изменится, если в комнату принести ещё 10 швейных иголок, купленных в магазине. Мы видим около себя бесконечно малую часть пространства, которое находится внутри окружающего нас пространства вселенной. Такие рассуждения дают нам право предполагать о существовании больших величин пространства вселенной, в которой находится видимое нами пространство, имеющих законы количественных отношений, характеризуемые числами со свойствами отличными от свойств действительных чисел.

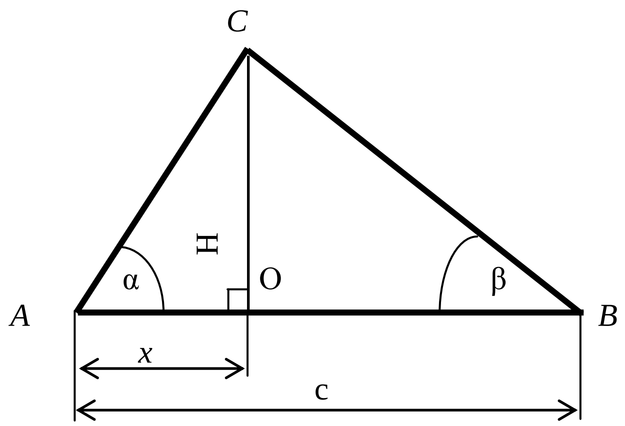
§1. Теорема №1

Существуют величины больших пространств, характеризуемые числом, величина которого не изменяется, если к нему прибавить действительное число. Это число назовём тьмой и дадим ему знак T_n.

Доказательство первым методом.

Рассмотрим треугольник согласно рис. 1.

Рис.1.



Площадь данного треугольника можно определить по стороне и двум прилежащим к ней углам по формуле (1).

$$(1) \quad S_{\Delta} = \frac{c^2 \cdot tg\alpha \cdot tg\beta}{2 \cdot (tg\alpha + tg\beta)},$$

где c – длина любой из сторон треугольника, α и β – величины прилежащих углов к стороне c и S – величина искомой площади треугольника.

Если вершину B треугольника переместить в точку О согласно рисунку (1), то длина стороны $AB= c$ уменьшится до x, а угол β достигнет величины 90° и треугольник ABC будет прямоугольным, тогда его площадь можно будет определить по формуле (2).

$$(2) \quad S_{\Delta} = \frac{c^2 \cdot tg\alpha}{2}.$$

Доказательство формул (1) и (2) , а также их широкое применение в различных отраслях народного хозяйства, можно найти в статье «Площадь треугольника. Новые задачи» еженедельного учебно-методического приложения «Математика» за №2, 1999 года к газете «Первое сентября». На эту тему можно получить достаточную информацию на сайтах фестивалей педагогических идей 2003-2004 и 2004-2005 учебных годов, данную преподавателем математики и информатики высшей категории Зудиным Василием Павловичем. Адрес этого сайта: http://festival.1september.ru.

При величине 90° одного из прилежащих углов к стороне c треугольника формула (1) значительно упрощается и принимает вид (2). Это даёт нам право в этом случае сравнивать величины значений этих формул с правой стороны, так как угол β не сократился, а только принял значение 90°. На основании этого перемещения пишем тождественное равенство (3).

$$(3) \qquad \frac{c^2 \cdot tg\alpha \cdot tg90^\circ}{2 \cdot (tg\alpha + tg90^\circ)} = \frac{c^2 \cdot tg\alpha}{2}$$

Сокращаем левую и правую части последнего равенства на величину $\frac{c^2 \cdot tg\alpha}{2} > 0$. Это будет равносильным преобразованием, после чего получим следующее выражение (4).

(4) $\frac{tg90^\circ}{(tg\alpha + tg90^\circ)} = 1$. Полученная дробь (4), равна единице, то есть числитель и знаменатель равны между собой, откуда следует

$$\boxed{tg90^\circ = tg90^\circ + tg\alpha} .$$

Этим доказательством нашли большую величину, которая не изменяется, если к ней прибавить действительное число. Данную величину назовём числом *тьма* и дадим ему знак T_n . Из данного доказательства следует, что $tg\ 90^\circ = T_n$.

Согласно определению основных тригонометрических функций, они получаются при повороте точки (1,0) вокруг начала координат, где считается точка (1,0) материальной, поэтому она должна иметь определённую величину несколько отличающейся от нуля, иначе нечему будет поворачиваться. Величина *tg90°* равна числу *тьма* (T_n), что доказали выше, а величину обратную числу T_n , назовём числом *мал* (0_n) , определяющим величину материальной точки (1,0) и точек при переходе n – мерных пространств в $(n-1)$ мерные пространства.

На основании доказанной теоремы получаем необычные свойства чисел T_n и 0_n.

1. $T_n = T_n + a,\ T_n = T_n$ *и* $\frac{T_n}{T_n} = 1$, где a действительное число.

2. $\frac{1}{T_n} = 0_n$ *, откуда* $T_n \cdot 0_n = 1, \quad 0_n = 0_n , \ \frac{0_n}{0_n} = 1$ *и* $\frac{1}{0_n} = T_n$.

На основании доказанного свойства числа T_n, найдём отличительное свойство числа 0_n, как обратного числу T_n.

3. $\frac{1}{T_n} = \frac{1}{T_n + a} = 0_n$, *откуда следует* $1 = T_n \cdot 0_n + a_n \cdot 0_n$ *или* $1 = 1 + a_n \cdot 0_n$.

На основании данного доказательства получили, что величина действительного числа не изменяется, если к нему прибавить число *мал* или число *мал*, умноженное на действительное число.

Данные выше свойства чисел *тьма* и *мал* нарушают аксиому Архимеда, которая утверждает, что для любых двух действительных чисел a и b, для которых $0 < a < b$, одно из неравенств $a+a > b$, $a+a+a > b$, …обязательно выполнимо. Ввиду того, что при сложении чисел *тьма* и *мал* с действительными числами нарушается аксиома Архимеда, то в равенствах с этими числами переносить из левой части в правую и наоборот числа с изменением знака и без их изменения, как действительные, так и числа *мал, тьма* нельзя. В этих случаях перенос членов равенства с противоположным знаком из одной части в другую не является равносильным преобразованием. В таких равенствах и уравнениях необходимо путём равносильных преобразований вида: $T_n + a - T_n = a$, $a + 0_n - a = 0_n$,

$\frac{0_n}{0_n} = 1$, $\frac{T_n}{T_n} = 1$, $T_n \cdot 0_n = 1$, $\frac{a}{0_n} = a \cdot T_n$, $\frac{a}{T_n} = a \cdot 0_n$, $T_n + a = T_n$, $a + 0_n = a_n$ — получить одни действительные числа или числа больших и малых пространств, а затем достигать требуемого результата. Приоритет выполнения арифметических операций сохраняется: сначала скобки, потом возведение в степень, далее умножение и деление (слева направо), потом сложение и вычитание (слева направо).

На основании доказанной теоремы принимаем величину материальной точки (1,0) равной числу 0_n *(мал)*, при повороте которой вокруг начала координат получаются тригонометрические функции. Равной числу *мал* принимаем также величину точек пространства, при которых n – мерные пространства переходят в пространства *(n-1)* размера. Исходя из определений и значений тригонометрических функций, а также новых чисел *тьма*, *мал* принимаем:

1. синусом угла α называется ордината точки, полученная поворотом точки $(1; 0_n)$ вокруг начала координат на угол α (обозначается sin α).

2. косинусом угла α называется абсцисса точки, полученная поворотом точки $(1; 0_n)$ вокруг начала координат на угол α (обозначается cos α).

3. $\sin 0 = \sin 0_n = 0_n$, $\cos 0 = \cos 0_n = 1$, $\cos 90° = 0_n$, $\sin 90° = 1$. Тангенсом угла α называется отношение синуса угла α к его косинусу. Таким образом,

$$tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad и \quad tg 90^0 = \frac{\sin 90^0}{\cos 90^0} = \frac{1}{0_n} = T_n .$$

Мы хотим, чтобы числа *тьма, мал* можно было складывать, умножать, вычитать и делить, чтобы эти операции обладали обычными свойствами, называемыми «аксиомами поля». Числа, состоящие из произведения числа *мал* с действительными числами, будем считать числами поля *мал.* Произведение действительных чисел на число *тьма* будем относить к полю чисел *тьма*. Числа вида $a \cdot 0_n$ будем называть малыми числами, где 0_n – число *мал*, а a – действительная часть малого числа. Числа вида $a \cdot T_n$ называем большими числами, где T_n – число *тьма*, а a – действительная часть большого числа. При этом должны выполняться такие свойства:

(1) $0_n + a \cdot 0_n = a \cdot 0_n + 0_n$, где a – действительное число ;

$T_n + a \cdot T_n = a \cdot T_n + T_n$;

(2) $0_n + (a \cdot 0_n + b \cdot 0_n) = (0_n + a \cdot 0_n) + b \cdot 0_n$, где b – действительное число;

$T_n + (a \cdot T_n + b \cdot T_n) = (T_n + a \cdot T_n) + b \cdot T_n$;

(3) $0_n + 0 = 0_n$;

$T_n + 0 = T_n$;

(4) $0_n + (-0_n) = 0;$

$T_n + (-T_n) = 0$;

(5) $0_n \cdot (a\cdot 0_n) = (a\cdot 0_n) \cdot 0_n;$

$T_n \cdot (a\cdot T_n) = (a\cdot T_n) \cdot T_n;$

(6) $0_n \cdot ((a\cdot 0_n) \cdot (b\cdot 0_n)) = (0_n \cdot (a\cdot 0_n)) \cdot (b\cdot 0_n)$;

$T_n \cdot ((a\cdot T_n) \cdot (b\cdot T_n)) = (T_n \cdot (a\cdot T_n)) \cdot (b\cdot T_n)$;

(7) $0_n \cdot 1 = 0_n;$

$T_n \cdot 1 = T_n;$

(8) $0_n \cdot ((a\cdot 0_n) + (b\cdot 0_n)) = 0_n \cdot (a\cdot 0_n) + 0_n \cdot (b\cdot 0_n);$

$T_n \cdot ((a\cdot T_n) + (b\cdot T_n)) = T_n \cdot (a\cdot T_n) + T_n \cdot (b\cdot T_n);$

(9) $0_n \cdot \frac{1}{0_n} = 1 = 0_n \cdot T_n$, что доказали выше.

$T_n \cdot \frac{1}{T_n} = 1 = 0_n \cdot T_n$

Множество с операциями, обладающими этими свойствами, называется полем.

Кроме арифметических операций, мы должны задать для чисел поля *тьма* и чисел поля *мал* порядок. Это значит, что для любых двух различных действительных чисел, умноженных на числа *тьма* или *мал,* должно быть определено, какое из них больше. (Если $a\cdot 0_n$ больше 0_n, будем писать $a\cdot 0_n > 0_n$ или $0_n < a\cdot 0_n$). При этом должны выполняться такие свойства:

(10) если $b\cdot 0_n > a\cdot 0_n$, $a\cdot 0_n > 0_n$, то $b\cdot 0_n > 0_n$;

$\textit{если}\, b\cdot T_n > a\cdot T_n,\ a\cdot T_n > T_n,\ \textit{то}\ b\cdot T_n > T_n$

(11) если $a\cdot 0_n > 0_n$, то $a\cdot 0_n + c > 0_n + c$ для любого c;

$\textit{если}\ \ a\cdot T_n > T_n,\ \textit{то}\ \ a\cdot T_n + c > T_n + c$

(12) если $a\cdot 0_n > 0_n$, $c > 0$, то $a\cdot 0_n \cdot c > 0_n \cdot c$;
если $a\cdot 0_n > 0_n$, $c < 0$, то $a\cdot 0_n \cdot c < 0_n \cdot c$.

$\textit{если}\ \ a\cdot T_n > T_n,\ c > 0,\ \ \textit{то}\ \ a\cdot T_n \cdot c > T_n \cdot c$

$\textit{если}\ \ a\cdot T_n > T_n,\ c < 0,\ \ \textit{то}\ \ a\cdot T_n \cdot c < T_n \cdot c$

Поле, в котором введён порядок с такими свойствами, называется упорядоченным полем. Таким образом ввели упорядоченное поле числа *мал* и упорядоченное поле числа *тьма*. Числа из поля числа *мал* могут перейти в поле действительных чисел, если их умножить на число *тьма*, а числа из поля *тьма* перейдут в поле действительных чисел, если их умножить на число *мал*, что было доказано выше теоремой один.

Доказательство вторым методом существования величин со свойствами числа тьма.

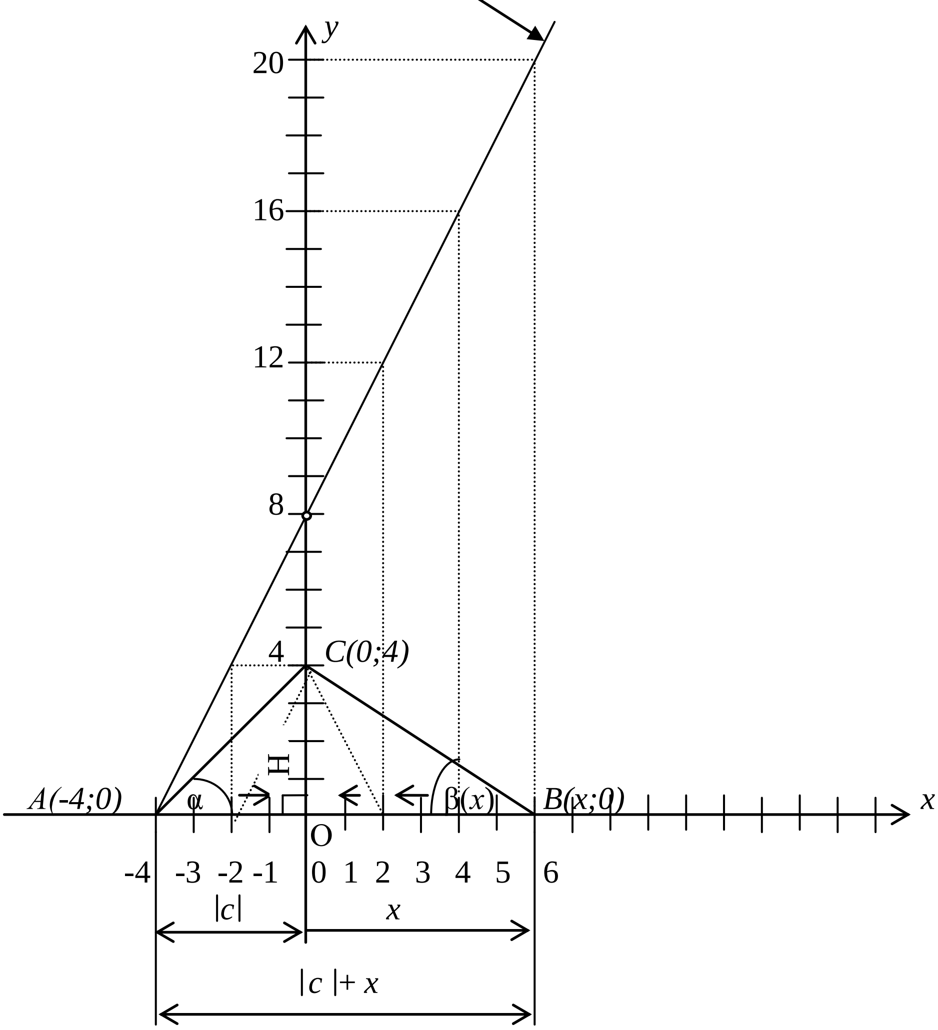
Рассмотрим функцию

$$S(x) = \frac{(|c| + x)^2 \cdot tg\alpha \cdot \frac{|c| \cdot tg\alpha}{x}}{2(tg\alpha + \frac{|c| \cdot tg\alpha}{x})},$$ где c = *const* и c < 0,

$\angle\alpha = const$ *и острый*, $S(x)$ *и* x – переменные величины. Функция *S(x)* задана на множестве $c \leq x < +\infty$. При *x = c, x=0* функция *S(x)* не имеет смысла. Числовые значения этой функции при каждом заданном значении *x* будут равны площади треугольника *ABC* согласно рис. 2 и формулы (1) определения площади треугольника по стороне и двум прилежащим к ней углам.

Рис.2

$$S(x) = \frac{(|c| + x)^2 \cdot tg\alpha \cdot \frac{|c| \cdot tg\alpha}{x}}{2(tg\alpha + \frac{|c| \cdot tg\alpha}{x})}$$



Функция *S(x)* на основании рис. 2 задаётся путём перемещения материальной точки *B* вершины треугольника *ABC* вдоль оси *Ox*. Вершина *A* имеет постоянные координаты *(c;0)*, *(на рис.2 c = - 4)*, вершина *C* имеет также постоянные координаты (0;4), а вершина *B* имеет постоянную ординату на оси *Ox* и переменную абсциссу, перемещаясь по оси *Ox*. *X* может изменяться на луче [c; + ∞), где можно будет определить площадь треугольника *ABC* по стороне $|c|+x$ и прилежащим к ней углам *ά и β(x)* (см. рис. 2). Фиксируя значения *x* в различных точках оси абсцисс на заданном множестве $c \le x < +\infty$, получаем различные значения: площадей *S(x)* треугольника *ABC*, величины углов *β(x)* и значения тангенсов углов *tg β(x)*, то есть от одного аргумента *x* будем рассматривать три функции.

1) Из треугольника *BOC*

$$tg\beta(x) = \frac{CO}{BO} = \frac{H}{x}.$$

Высоту *H* определим из прямоугольного треугольника *AOC* .

$$\frac{H}{|c|} = tg\alpha \quad и \quad H = |c| \cdot tg\alpha$$

Подставив в верхнее выражение данного пункта значение $H = |c| \cdot tg\alpha$, получим

$$tg\beta(x) = \frac{|c| \cdot tg\alpha}{x}.$$

2) На основании формулы (1) площадь треугольника *ABC* на рис.2 будет равна

$$(3) \qquad S(x) = \frac{(|c|+x)^2 \cdot tg\alpha \cdot tg\beta(x)}{2(tg\alpha + tg\beta(x))}$$

Подставим значение $tg\beta(x) = \frac{|c| \cdot tg\alpha}{x}$ из пункта (1) в формулу (3), получим заданную функцию.

$$(4) \qquad S(x) = \frac{(|c|+x)^2 \cdot tg\alpha \cdot \frac{|c| \cdot tg\alpha}{x}}{2(tg\alpha + \frac{|c| \cdot tg\alpha}{x})}$$

3) Рассмотрим предел функции *S(x)* из второго пункта при *x* → 0, тогда согласно рисунка 2 угол *β(x)* будет → 90° и из формулы (1) получится формула (2) определения площади треугольника по стороне и двум прилежащим к ней углам. После чего найдём конечный предел этой функции в точке *x = 0.*

$$\lim_{x \to 0 \pm 0} S(x) = \lim_{x \to 0 \pm 0} \frac{(|c|+x)^2 \cdot tg\alpha \cdot \frac{|c| \cdot tg\alpha}{x}}{2(tg\alpha + \frac{|c| \cdot tg\alpha}{x})} = \lim_{x \to 0 \pm 0} \frac{(|c|+x)^2 \cdot tg\alpha \cdot |c| \cdot tg\alpha \cdot x}{2 \cdot (x \cdot tg\alpha + |c| \cdot tg\alpha) \cdot x} =$$

$$= \lim_{x \to 0 \pm 0} \frac{(|c|+x)^2 \cdot |c| \cdot tg^2\alpha}{2 \cdot (x \cdot tg\alpha + |c| \cdot tg\alpha)} = \frac{|c|^3 \cdot tg^2\alpha}{2 \cdot |c| \cdot tg\alpha} = \frac{c^2 \cdot tg\alpha}{2}$$

, то есть получили конечный предел заданной функции, равный площади треугольника *ABC*, когда его вершина *B* совпала с началом координат и угол *B* стал равен 90°. Таким методом получили формулу (2) определения площади треугольника по стороне *c* и двум прилежащим к ней углам α и β, когда один из прилежащих к ней углов β = 90°, а другой угол α острый.

$$(2)\ \ S_{\Delta}=\frac{c^2\cdot tg\alpha}{2}$$

Функция $S(x)=\dfrac{(|c|+x)^2\cdot tg\alpha\cdot\dfrac{|c|\cdot tg\alpha}{x}}{2(tg\alpha+\dfrac{|c|\cdot tg\alpha}{x})}$ в точке *x = 0* имеет конечные, равные пределы справа и слева равные числу $S_{\Delta}=\dfrac{c^2\cdot tg\alpha}{2}$, что доказали выше. Следовательно, при *x = 0* функция $S(x)=\dfrac{(|c|+x)^2\cdot tg\alpha\cdot\dfrac{|c|\cdot tg\alpha}{x}}{2(tg\alpha+\dfrac{|c|\cdot tg\alpha}{x})}$ имеет устранимый разрыв первого рода и в точке *x = 0* она равна $S_{\Delta}=\dfrac{c^2\cdot tg\alpha}{2}$. В предельном переходе, данном выше, делаем равносильные преобразования $\lim\limits_{x\to 0\pm 0}\dfrac{(|c|+x)^2\cdot tg\alpha\cdot\dfrac{|c|\cdot tg\alpha}{x}}{2\cdot(tg\alpha+\dfrac{|c|\cdot tg\alpha}{x})}=\lim\limits_{x\to 0\pm 0}\dfrac{c^2\cdot tg\alpha\cdot\dfrac{|c|\cdot tg\alpha}{x}}{2\cdot(tg\alpha+\dfrac{|c|\cdot tg\alpha}{x})}=\dfrac{c^2\cdot tg\alpha}{2}$.

Сокращаем последний предельный переход в левой и правой частях на $\dfrac{c^2\cdot tg\alpha}{2}$, получим $\lim\limits_{x\to 0\pm 0}\dfrac{\dfrac{|c|\cdot tg\alpha}{x}}{(tg\alpha+\dfrac{|c|\cdot tg\alpha}{x})}=1$, откуда следует, что $\dfrac{|c|\cdot tg\alpha}{x}=\dfrac{|c|\cdot tg\alpha}{x}+tg\alpha$. Получившееся уравнение $\dfrac{|c|\cdot tg\alpha}{x}=\dfrac{|c|\cdot tg\alpha}{x}+tg\alpha$ показывает, что величина $\dfrac{|c|\cdot tg\alpha}{x}$ $при\ x\to 0\ \ или\ x=0_n$ не изменяется, если к ней прибавить действительное число, то есть величина
$\dfrac{|c|\cdot tg\alpha}{x}$ $при\ \ x\to 0\ \ или\ \ x=0_n$ обладает свойствами, которых нет у действительных чисел.

Согласно рис. 2 и определения функции $S(x)=\dfrac{(|c|+x)^2\cdot tg\alpha\cdot\dfrac{|c|\cdot tg\alpha}{x}}{2(tg\alpha+\dfrac{|c|\cdot tg\alpha}{x})}$ величина

$\dfrac{|c|\cdot tg\alpha}{x}$ $при\ \ x\to 0\ \ или\ \ x=0_n$ равна тангенсу 90°.

Итак доказали вторым методом существование больших величин, имеющих уникальное свойство не изменять свою величину при прибавлении к ним действительных чисел, которые в количественном отношении приравняли выше к числу *T (тьма).*

На рисунке 2 построим график функции *S(x)*. Для построения графика зададим значения: *c = – 4,* ∠α = 45°, и составим таблицу значений аргументов и соответствующих им значений функции *S(x),* считая, что в точке *x = 0* $S(x)=\dfrac{c^2\cdot tg\alpha}{2}$.

x	-4	-2	0	4	6
S(x)	0	4	8	16	20

Выявление свойств числа мал.

Выше были даны формулы определения площади треугольника по стороне и двум прилежащим к ней углам.

(1) $$S_\Delta = \frac{c^2 \cdot tg\alpha \cdot tg\beta}{2 \cdot (tg\alpha + tg\beta)}$$

Если один из прилежащих углов к стороне *c* будет равен 90°, например угол β, то формула (1) примет вид (2)

(2) $$S_\Delta = \frac{c^2 \cdot tg\alpha}{2}.$$

Из тригонометрии известно, что $tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$, *откуда* $tg\alpha = \frac{1}{ctg\alpha}$ *и* $tg\beta = \frac{1}{ctg\beta}$.

Подставим в формулы (1) и (2) вместо значений $tg\alpha$ *и* $tg\beta$ их значения через котангенсы, данные выше, получим формулы (3) и (4)

(3) $$S_\Delta = \frac{c^2 \cdot \frac{1}{ctg\alpha} \cdot \frac{1}{ctg\beta}}{2 \cdot (\frac{1}{ctg\alpha} + \frac{1}{ctg\beta})} = \frac{c^2}{2 \cdot ctg\alpha \cdot ctg\beta \cdot (\frac{ctg\alpha + ctg\beta}{ctg\alpha \cdot ctg\beta})} = \frac{c^2}{2 \cdot (ctg\alpha + ctg\beta)}$$. Итак получили (3) $$S_\Delta = \frac{c^2}{2 \cdot (ctg\alpha + ctg\beta)}.$$

(4) $$S_\Delta = \frac{c^2 \cdot \frac{1}{ctg\alpha}}{2} = \frac{c^2}{2 \cdot ctg\alpha}$$. Окончательно получили из формулы (2) формулу (4)

(4) $$S_\Delta = \frac{c^2}{2 \cdot ctg\alpha}.$$

С помощью формулы (3) можно определять площади любых треугольников по стороне и двум прилежащим к ней углам, а формула (4) пригодна для прямоугольных треугольников, когда угол α, прилежащий к стороне *c* острый, а угол β, также прилежащий к стороне *c*, прямой. При величине угла β=90° формулы (3) и (4), согласно рисунка №1, а также формул (1), (2), будут давать равные результаты, поэтому их можно соединить знаком равенства

$$S_\Delta = \frac{c^2}{2 \cdot (ctg\alpha + ctg 90°)} = \frac{c^2}{2 \cdot ctg\alpha}.$$ Сократим дроби на величину $\frac{c^2}{2}$, получим $$\frac{1}{ctg\alpha + ctg 90°} = \frac{1}{ctg\alpha}.$$

Согласно свойств пропорции последнее полученное равенство равносильно можно записать в виде

$$\boxed{ctg\alpha + ctg 90° = ctg\alpha}.$$

Откуда видно, что величина действительного числа, равная котангенсу угла α, не изменяется если к ней прибавить величину котангенса угла 90°. На основании этого делаем вывод, что нашли величину с нестандартными свойствами, равную величине котангенса 90°. Эту величину назовём числом 0_n (*мал)*. Котангенсом угла α называется отношение косинуса угла α к его синусу. Таким образом,

$ctg 90° = \frac{\cos 90°}{\sin 90°} = \frac{0_n}{1} = 0_n$. Значения тригонометрических величин и аксиоматика числа *мал* в этой формуле были даны выше. Свойства найденного числа *мал* совпали с его свойствами полученными выше с помощью числа *тьма*. Если к действительному числу прибавить число *мал* или действительное число, умноженное на число *мал*, то величина действительного числа не изменяется. $\boxed{a \pm 0_n = a}$

§2. Применение чисел тьма и мал при решении задач.

Формулы приведения в тригонометрии.

При изучении формул приведения часто возникают вопросы их доказательства с помощью формул сложения. Например, формулу приведения для тангенса $tg(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-ctg\alpha$ требуется доказать с помощью формулы сложения $tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta}$. Проводя преобразования в формуле приведения с помощью формулы сложения, получим

$tg(\frac{\pi}{2}+\alpha)=\frac{tg\frac{\pi}{2}+tg\alpha}{1-tg\frac{\pi}{2}\cdot tg\alpha}$, где пришли в тупик, так как $tg\ \frac{\pi}{2}=tg 90^0$ в настоящий период не определён. С помощью применения нового числа *тьма*, его свойств, аксиом и принятия величины *tg 90° = T_n(тьма)* можно легко выйти из этой тупиковой ситуации.

$tg(\frac{\pi}{2}+\alpha)=\frac{tg\frac{\pi}{2}+tg\alpha}{1-tg\frac{\pi}{2}\cdot tg\alpha}=\frac{T_n+tg\alpha}{1-T_n\cdot tg\alpha}=\frac{T_n}{-T_n\cdot tg\alpha}=\frac{1}{-tg\alpha}=-ctg\alpha$, что требовалось доказать.

Число тьма в формуле определения площади треугольника по стороне и двум прилежащим к ней углам.

(1) $S_\Delta=\frac{c^2\cdot tg\alpha\cdot tg\beta}{2\cdot(tg\alpha+tg\beta)}$. Данная формула (1) дана выше. Эта формула имеет большое практическое значение при определении площадей треугольников, когда можно легко замерить только одну его сторону и два прилежащих к ней угла, а также при составлении тригонометрических и дифференциальных уравнений. Если один из прилежащих углов к стороне треугольника равен 90°, то данная формула преобразуется в формулу (2) с помощью различных преобразований, выше дано преобразование с помощью предельного перехода.

(2) $S_\Delta=\frac{c^2\cdot tg\alpha}{2}$.

На такие преобразования необходимо затрачивать много времени, а на их поиск требуется достаточный творческий потенциал. Для облегчения решения этой задачи можно применить число *тьма*. Если угол $\beta = 90°$, то принимаем $tg\beta = T_n$ и проводим в формуле (1) соответствующие преобразования.

$$S_\Delta = \frac{c^2 \cdot tg\alpha \cdot tg\beta}{2 \cdot (tg\alpha + tg\beta)} = \frac{c^2 \cdot tg\alpha \cdot T_n}{2 \cdot (tg\alpha + T_n)} = \frac{c^2 \cdot tg\alpha \cdot T_n}{2 \cdot T_n} = \frac{c^2 \cdot tg\alpha}{2}.$$

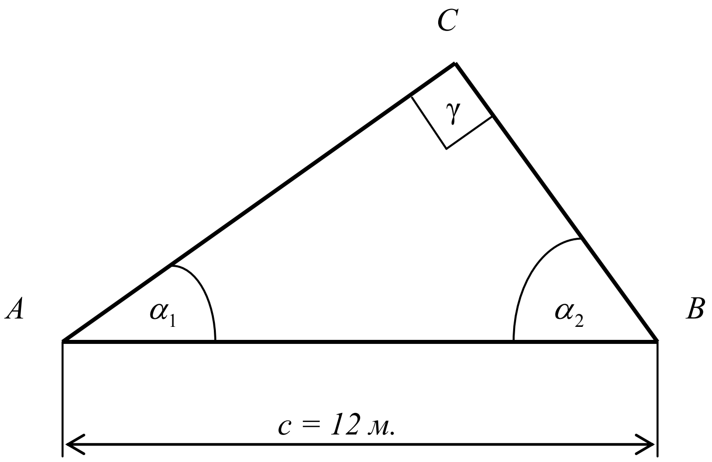
Откуда видно, что число *тьма* даёт универсальность формулы (1) определения площади треугольника по стороне и двум прилежащим к ней углам.

Применение числа тьма в тригонометрических и дифференциальных уравнениях.

Задача № 1

Фермеру требуется сделать перекрытие на садовый домик, профиль которого будет иметь форму прямоугольного треугольника с гипотенузой 12 (м.) и площадью (32 кв. м.). Определить углы, прилежащие к гипотенузе, то есть основанию перекрытия, чтобы точно сделать объект и оптимально израсходовать строительный материал. (См. рис. 3)

Рис. № 3



Самый рациональный способ решения этой задачи достигается применением тригонометрического или дифференциального уравнений, составленных с помощью формулы (1) определения площади треугольника по стороне и двум прилежащим к ней углам, с которыми можно глубже познакомиться в указанных выше источниках информации. Особенностью решения этой задачи является то, что угол напротив известной стороны дан величиной 90°. Для решения данной задачи применим тригонометрическое уравнение автора

(1) $tg^2\alpha \cdot (c^2 - 2 \cdot S \cdot tg\gamma) + tg\alpha \cdot c^2 \cdot tg\gamma - 2 \cdot S \cdot tg\gamma = 0$, где

S – площадь профиля перекрытия = 32 (м. кв.), c – длина основания (гипотенузы) = 12 (м.), $\gamma = 90°$, то есть $tg\,\gamma$ стандартным способом не определён. Для решения данного уравнения используем число тьма и преобразуем его к виду (2).

$tg^2\alpha \cdot (c^2 - 2 \cdot S \cdot T_n) + tg\alpha \cdot c^2 \cdot T_n - 2 \cdot S \cdot T_n = 0.$

Откуда согласно свойств числа тьма последнее уравнение примет следующий вид $-tg^2\alpha \cdot 2 \cdot S \cdot T_n + tg\alpha \cdot c^2 \cdot T_n - 2 \cdot S \cdot T_n = 0$. Поделим последнее уравнение на $-T_n$, получим требуемое уравнение вида

(2) $2 \cdot S \cdot tg^2\alpha - c^2 \cdot tg\alpha + 2 \cdot S = 0$. В уравнение (2) подставляются данные из задачи №1 и получается уравнение вида

$2\cdot 32\cdot tg^2\alpha - 12^2\cdot tg\alpha + 2\cdot 32 = 0$ *или* $64tg^2\alpha - 144tg\alpha + 64 = 0 \Leftrightarrow 4tg^2\alpha - 9tg\alpha + 4 = 0$.Делаем подстановку $tg\alpha = t$, получим квадратное уравнение $4t^2 - 9t + 4 = 0$. Решаем квадратное уравнение по общей формуле $t_{1,2} = \dfrac{9\pm\sqrt{81-64}}{8} = \dfrac{9\pm\sqrt{17}}{8}$, *откуда* $t_1 \approx 0{,}61$ *и* $t_2 \approx 1{,}64$. Подставляем значения $t_{1,2}$ в подстановку $tg\alpha = t$, получим $tg\alpha_1 \approx 0{,}61$ *и* $tg\alpha_2 \approx 1{,}64$, откуда $\alpha_1 \approx 31{,}38^0$ *и* $\alpha_2 \approx 58{,}62^0$.

Определение производной функции с применением чисел мал и тьма.

Перейдём к общему определению производной. Пусть функция *f(x)* определена на некотором промежутке. Зафиксируем какую-нибудь точку *x* из этого промежутка и возьмём число 0_n *(мал)*, так, чтобы точка $x+0_n$ также лежала в этом промежутке. Рассмотрим разность значений функции в точках $x+0_n$ и *x,* то есть $f(x+0_n) - f(x)$. Составим дробь

$$\frac{f(x+0_n)-f(x)}{0_n}.$$

Числитель этой дроби — приращение функции *f* в точках $x+0_n$ и *x*, а знаменатель — приращение аргумента $x + 0_n$ и *x*. В этом случае говорим, что функция *f(x)* имеет в точке *x* производную, равную данному отношению. Производная обозначается так: $f'(x)$ (читается: «эф штрих от икс»).

Производной функции *f(x)* в точке *x* называется отношение приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента равно числу *мал*.

$$f'(x) = \frac{f(x+0_n)-f(x)}{0_n}$$

Теорема 2. Показательная функция e^x дифференцируема в каждой точке и $(e^x)' = e^x$.

Доказательство. Найдём сначала приращение функции $y = e^x$ *в точке* x_0:

$$\Delta y = e^{x_0+0_n} - e^{x_0} = e^{x_0}\cdot e^{0_n} - e^{x_0} = e^{x_0}\cdot(e^{0_n} - 1).$$

В приращении функции необходимо найти величину числа *e* в степени числа *мал*. Иррациональное число *e* играет важную роль в математике и её приложениях. Число *e* можно определить как предел последовательности

$$e = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n.$$

Примем величину $n\to\infty$ равной конечному числу *тьма*, возведём число *e* в степень *мал* и делая равносильные преобразования, получим конечный результат

$$e^{0_n} = (1+\frac{1}{T_n})^{T_n\cdot 0_n} = (1+0_n)^1 = 1+0_n.$$

Подставим полученную величину e^{0_n} в приращение функции, получим

$$\Delta y = e^{x_0}\cdot(1+0_n-1) = e^{x_0}\cdot 0_n.$$

Пользуясь определением производной функции, находим:

$(e^{x_0})' = \dfrac{e^{x_0+0_n} - e^{x_0}}{0_n} = \dfrac{e^{x_0}\cdot 0_n}{0_n} = e^{x_0}$. Итак доказали $(e^x)' = e^x$.

Теорема 3. Тригонометрическая функция *sin x* дифференцируема в каждой точке и $(\sin x)' = \cos x$.

Доказательство.

Согласно выше данного определения производной функции и свойств чисел *тьма, мал* создадим отношение

$$\sin' x = \frac{\sin(x+0_n)-\sin x}{0_n} = \frac{\sin\, x\cdot\cos\, 0_n+\cos\, x\cdot\sin 0_n-\sin\, x}{0_n} = \frac{\sin\, x\cdot 1+\cos\, x\cdot 0_n-\sin\, x}{0_n} =$$

$$= \frac{\cos\, x\cdot 0_n}{0_n} = \cos\, x$$

Теорема 4. Производная степенной функции при натуральном показателе *n* определяется по формуле

$$(x^n)' = n\cdot x^{n-1}$$

Доказательство.

Для доказательства применим определение производной функции и формулу бинома Ньютона.

$$(x^n)' = \frac{(x+0_n)^n - x^n}{0_n} = \frac{x^n + n\cdot x^{n-1}\cdot 0_n + ... + 0_n^n - x^n}{0_n} = \frac{n\cdot x^{n-1}\cdot 0_n}{0_n} = n\cdot x^{n-1}$$

В формуле бинома Ньютона члены суммы с числом *мал* выше первой степени не записывали, кроме последнего. При делении чисел *мал* в степени выше единицы на знаменатель 0_n данного выражения получаются числа поля *мал,* которые на величину действительного значения не влияют.

Определение длины окружности и площади круга новым методом, используя числа тьма и мал.

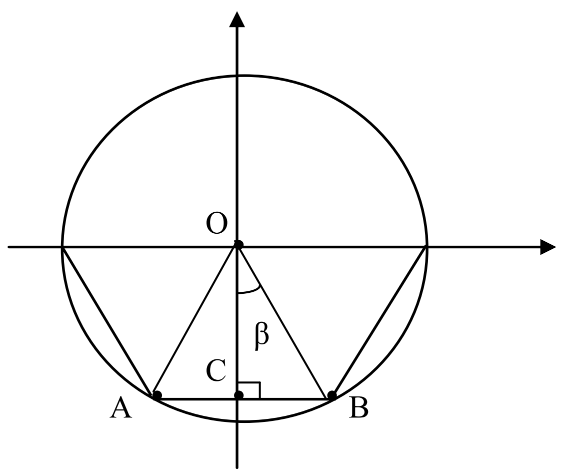
Впишем в окружность правильный многоугольник (смотри рис. 4.). Затем будем увеличивать количество сторон вписанного многоугольника до такого состояния, когда его стороны совпадут с окружностью. В этом случае длина окружности и длина периметра многоугольника будут равны, а длина стороны правильного многоугольника будет равна числу $2\cdot R\cdot 0_n$, что будет доказано ниже.

Теорема 5.

Длина окружности равна удвоенному произведению числа π на её радиус. *l=2 πR.*

Дано: 1) окружность с радиусом R и центром O, 2) центральный развёрнутый угол окружности, опирающийся на полуокружность, равен 180° или π радиан.

Рис. 4.



Доказать, что длина окружности равна 2πR.

Доказательство.

1). Впишем в окружность правильный многоугольник (см. рис.4.). Примем длину радиуса окружности R=OB=OA=1, длину стороны *AB* многоугольника равной a_n, а число сторон многоугольника *n*. Из рисунка 4 имеем: угол *COB* прямоугольного треугольника *OBC* равен половине угла *AOB.* Центральный угол окружности *AOB*, опирающийся на сторону правильного многоугольника, равен $\frac{360^0}{n}$,откуда угол *COB* = $\beta=\frac{180^0}{n}$. Катет *CB* прямоугольного треугольника *OBC* равен половине стороны *AB* равнобедренного треугольника *OAB,* у которого *OA=OB=R*. В прямоугольном треугольнике *OBC*

$\frac{CB}{OB}=\frac{\frac{a_n}{2}}{R}=\frac{a_n}{2R}=\sin\beta=\sin\frac{180^0}{n}$, откуда длина стороны правильного *n*-угольника, выраженная через радиус описанной около него окружности, будет определяться по формуле

$$a_n=2R\sin\frac{180^0}{n}.$$

2). Ясно, что при увеличении числа сторон вписанного в окружность правильного многоугольника его периметр будет приближаться к длине окружности, а угол β стремиться к нулю. Необходимо зафиксировать числом количество сторон правильного вписанного в окружность многоугольника, при котором он перейдёт в окружность. Для этого рассмотрим замечательный предел отношения $\frac{\sin\beta}{\beta}$ *при* $\beta\to 0$. Известно, что

$$\lim_{\beta\to 0}\frac{\sin\beta}{\beta}=1.$$

На основании этого предела видно, что существует фиксированное значение величины угла β при его стремлении к нулю, когда величина угла β, то есть длина половины дуги *AB* и величина *sin β* , то есть длина катета *CB* совпадут, так как в данном случае длина половины дуги *AB* равна величине угла *β,* а величина катета *CB* равна *sin β*. Выше доказывали, что $\sin 0_n=0_n$. Отсюда делаем вывод, что при достижении длины катета $CB=0_n$ он совпадёт с половиной дуги *AB* , а периметр вписанного многоугольника в окружность и длина окружности будут равны. Следовательно в формулу длины стороны вписанного многоугольника $a_n=2R\sin\frac{180^0}{n}$ необходимо вставить такое значение количества его сторон *n*, чтобы $\sin\frac{\pi}{n}$ был равен числу 0_n *(мал)*. Такому условию удовлетворяет количество сторон $n=\pi\cdot T_n$, тогда $\sin\frac{\pi}{n}=\sin\frac{\pi}{\pi\cdot T_n}=\sin\frac{1}{T_n}=\sin 0_n=0_n$. Длина стороны правильного вписанного многоугольника при его переходе в окружность будет зависеть от длины радиуса окружности и равняться на основании последних формул следующей величине

$$a_n=2\cdot R\cdot 0_n.$$

При предельном переходе вписанный в окружность многоугольник совпал с самой окружностью.

3). Для определения искомой длины окружности найдём длину периметра вписанного в неё правильного многоугольника, когда число его сторон $n=\pi\cdot T_n$, а длина стороны $a_n=2\cdot R\cdot 0_n$. Периметр *p* правильного вписанного многоугольника в окружность будет равен произведению числу его сторон на длину стороны.

$p = a_n \cdot n = 2 \cdot R \cdot 0_n \cdot \pi \cdot T_n = 2\pi \ R = l\,окружности$, где произведение $0_n \cdot T_n = 1$, что доказано выше.

Итак доказали новым методом, что длина окружности l определяется по формуле
$l = 2\,\pi \cdot R$.

Теорема 6.

Площадь круга равна произведению числа π на квадрат её радиуса. $S = \pi R^2$.

Дано: 1) круг с радиусом R – O(R), центральный развёрнутый угол окружности, опирающийся на полуокружность, равен 180° или π радиан. Доказать, что площадь круга S равна πR^2.

Доказательство.

Для доказательства теоремы 6 используем формулы, рассуждения и рисунок 4 теоремы 5.

1) На рисунке 4 площадь круга будет примерно равна сумме площадей вписанных в неё треугольников A_nOB_n. Количество которых равно количеству сторон вписанного в неё многоугольника.

2) При увеличении количества сторон вписанного правильного многоугольника их длина будет уменьшаться и достигнет величины $A_nB_n = a_n = 2 \cdot R \cdot 0_n$, что доказано в теореме 5. При такой длине сторон вписанного многоугольника его периметр будет равен длине описанной около него окружности, сумма площадей треугольников A_nOB_n сравняется с площадью круга, а количество треугольников и сторон многоугольника достигнет числа $n = \pi \cdot T_n$, угол $\beta = 0_n$, углы OA_nB_n и $OB_n\,A_n$ достигнут величины 90°,о чём говорилось выше в теореме 5.

3) Площадь одного треугольника A_nOB_n при длине его стороны $A_nB_n = a_n = 2 \cdot R \cdot 0_n$, и прилежащих к ней равных углов OA_nB_n , $OB_n\,A_n$ величиной 90° определим по формуле (1) данной выше.

$$(1) \qquad S_\Delta = \frac{c^2 \cdot tg\alpha \cdot tg\beta}{2 \cdot (tg\alpha + tg\beta)}$$

$$S_{\Delta\ AOB} = \frac{(2 \cdot R \cdot 0_n)^2 \cdot T_n \cdot T_n}{2 \cdot (T_n + T_n)} = \frac{4 \cdot R^2 \cdot 0_n^2 \cdot T_n^2}{4 \cdot T_n} = R^2 \cdot 0_n^2 \cdot T_n = R^2 \cdot 0_n.$$

Количество равных треугольников A_nOB_n , у которых одна сторона совпадает со стороной вписанного в окружность правильного многоугольника, а две другие являются радиусами окружности, равно количеству сторон правильного многоугольника. При длине стороны вписанного правильного многоугольника в окружность $A_nB_n = a_n = 2 \cdot R \cdot 0_n$ их количество будет $n = \pi \cdot T_n$, что доказано выше в теореме 5. Сумма площадей всех треугольников A_nOB_n равна площади одного треугольника $S_{\Delta\ AOB} = R^2 \cdot 0_n$, умноженная на их количество $n = \pi \cdot T_n$.

$$\sum S_{\Delta\ A_nOB_n} = R^2 \cdot 0_n \cdot \pi \cdot T_n = \pi \cdot R^2.$$

Так как стороны правильного вписанного многоугольника $A_nB_n = a_n = 2 \cdot R \cdot 0_n$ совпали с описанной около него окружностью, которые являются также сторонами треугольников A_nOB_n , то сумма площадей треугольников A_nOB_n будет равна площади круга. Отсюда следует, что площадь круга равна

$S_{круга} = \pi \cdot R^2$, что требовалось доказать.

Числа тьма и мал при раскрытии неопределённостей законов изменения тел и определяющих их функций.

Изучение законов движения всегда начинается с движения тел, размеры которого достаточно малы. Движение такого тела происходит наиболее просто, так как не принимаются во внимание вращение тела, а также перемещение различных частей тела друг относительно друга. Тело, размерами которого при изучении его движения можно пренебречь, называется материальной точкой, то есть материальная точка приравнивается к нулю, что приводит к неточным понятиям и расчётам. Если величина тела равна нулю, то что же тогда движется? Принимаем, что тела никогда не исчезают и не появляются ни из чего, а только могут переходить из одного состояние в другое, поэтому даём величину материальной точке равной числу 0_n *(мал)*.

Возможность рассматривать движение некоторого тела как движение материальной точки определяется не одними только абсолютными размерами тела, а зависит от условий задачи. Например, рассматривая движение Земли вокруг Солнца, можно считать Землю материальной точкой. Однако Землю никак нельзя рассматривать как материальную точку при изучении её суточного вращения вокруг своей оси. Материальная точка Земля никогда не будет равна нулю в период её существования в данной солнечной системе, так как нуль говорит об её отсутствии. Принимая величину материальной точки равной числу 0_n *(мал)*, будем ближе к истине и это поможет нам более рационально раскрывать неопределённости и решать другие задачи.

Рассмотрим функцию $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$, которая определяет изменение состояния материальной точки. Значение заданной функции легко вычисляется при любой величине аргумента x в области действительных чисел, кроме числа 2. При $x = 2$ числитель и знаменатель функции равны 0, то есть материальная точка исчезает при $x = 2$, а затем снова появляется при других значениях x, что противоречит принятой нами выше аксиоматике. Переменная x характеризует изменение материальной точки, величину которой принимаем равной числу *мал.* Величину материальной точки при всех значениях x, кроме числа 2, для рассматриваемой функции можно не учитывать, а в точке 2 её значение обязательно берём во внимание, так как по нашей аксиоматике материальная точка не исчезает и не появляется из ничего, а только может переходить из одного состояния в другое, поэтому значение данной функции при $x = 2$ вычисляем следующим образом

$$f(2)=\frac{(2+0_n)^2-4}{2+0_n-2}=\frac{4+4\cdot 0_n+0_n^2-4}{0_n}=\frac{4\cdot 0_n}{0_n}+\frac{0_n^2}{0_n}=4+0_n=4,$$

где в точке 2 материальная точка увеличивает значение x на её величину.

Без учёта величины материальной точки при $x = 2$ данная функция не имеет смысла, так как получаются нулевые значения в числителе и знаменателе, то есть материальная точка исчезает. Получившуюся неопределённость приходится раскрывать.

$f(2)=\dfrac{2^2-4}{2-2}=\dfrac{0}{0}$. Раскроем данную неопределённость с помощью предельного перехода $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x+2)=4.$

При других значениях x отличных от двух величину заданной функции можно вычислять без учёта значения материальной точки, так как результаты будут равны. Например, $f(3)=\dfrac{3^2-4}{3-2}=5$ *или* $f(3)=\dfrac{(3+0_n)^2-4}{3+0_n-2}=\dfrac{9+6\cdot 0_n+0_n^2-4}{1+0_n}=\dfrac{5+6\cdot 0_n+0_n^2}{1+0_n}=\dfrac{5}{1}=5$

Заключение.

Математика широко изучает пространственные формы и количественные отношения реального мира в самом широком понимании этих слов. В данной книге с помощью математики расширили познания внешнего мира, обнаружили величины, характеризующие свойствами в количественном отношении отличными от свойств действительных чисел. Для новых величин больших и малых пространств созданы поля чисел *тьма* и *мал.* Данные числа в школьном курсе математики облегчают доказательство многих формул, глубже раскрывают явления в предельных переходах и дают возможность для творческого раскрытия тайн малых и больших пространств. Существует высказывание, что твой ум без числа ничего не постигает. Числа, предложенные на страницах этой книги, найдут широкое применение в народном хозяйстве, математике и другим предметам, изучаемым в учебных заведениях.

В окружающем нас мире все тела постоянно находятся в движении, изменяют своё состояние и взаимосвязаны между собой. В математическом анализе описание переменных явлений осуществляется с помощью функций, которые получают определённое постоянное числовое значение в данный момент времени. Понятие функции, идея функциональной связи между переменными величинами, является отображением взаимосвязи между предметами реального мира, что дало нам возможность обнаружить свойства новых величин, найти им применение при решении задач и создать поля чисел *тьма, мал.*

Многие считают, что процесс создания чисел в настоящий период достиг абсолютного совершенства и создание новых чисел только навредит математике, так как успешно обходятся и без них. Большие и малые пространства изучены на недостаточном уровне, разрабатываются нано технологии, осваивается космическое пространство, поэтому и процесс создания чисел должен постоянно совершенствоваться и развиваться. С помощью математического орудия познаётся внешний мир и были найдены в этой книге отличительные свойства в количественном отношении тел больших и малых пространств.

Проникновение математических методов в науки, связанные с изучением реального мира и даже простой практики, способствуют развитию самой математики.

Преподаватель математики и информатики высшей категории ГБОУ СПО Ардатовского коммерческо-технического техникума Нижегородской области

__________________________________ Зудин Василий Павлович.